

Границы спектра графа.

Для спектра $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ неориентированного графа G справедливы следующие утверждения:

1. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - действительные числа и $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$;
2. если граф G не содержит рёбер, то $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$;
3. если граф G содержит по меньшей мере одно ребро, то:
 - $1 \leq r \leq n-1$ (1);
 - $-r \leq q \leq -1$ (2).

Верхняя граница в (1) достигается тогда и только тогда, когда G — полный граф, в то время как нижняя граница достигается тогда и только тогда, когда компонентами графа G являются графы K_2 и, возможно, K_1 . Верхняя граница в (2) достигается тогда и только тогда и только тогда, когда компонентами графа G являются полные графы; нижняя граница достигается тогда и только тогда, когда компонента графа G с максимальным индексом является двудольным графом. Если G связный граф, то нижняя граница в (1) заменяется на $2 \cos \frac{\pi}{n+1}$. Равенство справедливо тогда и только тогда, когда G — простая цепь.

Уравновешенная неполная блок-схема (ВІВ-схема).

ВІВ-схема состоит из v элементов и b подмножеств этих элементов, называемых блоками, такими, что:

- каждый элемент содержится в r блоках;
- каждый блок содержит k элементов;
- каждая пара элементов одновременно содержится в λ^* блоках.

Целые числа (v, b, r, k, λ^*) называются *параметрами* схемы.

В частном случае $r=k$ схема называется *симметричной*.

Если задана ВІВ-схема, то её граф строится следующим образом: $b+v$ вершина графа соответствует блокам и элементам схемы, при этом две вершины смежны тогда и только тогда, когда одна из них соответствует блоку, а другая — элементу, содержащемуся в этом блоке. Граф является двудольным, причём каждая его вершина имеет степень r или k в зависимости от того, соответствует ли она элементу или блоку. Вычисление спектров этих графов не представляет трудности, если только определена матрица инцидентий схемы. Это $(0, 1)$ -матрица размера $v \times b$, строки которой соответствуют элементам, а столбцы — блокам схемы. Значение элемента матрицы равно 1, тогда и только тогда, когда элемент схемы, соответствующий строке, содержится в блоке, соответствующем столбцу. Непосредственно из определений схемы следует, что для матрицы инцидентий B справедливы равенства

$BB^T = (r - \lambda^*)I + \lambda^*J$ и $JB = kJ$, из которых вытекают два основных соотношения между параметрами схемы: $vr = bk$ и $\lambda^*(v-1) = r(k-1)$.

Первое следует из $vrJ_{v \times b} = J_v(BJ_b) = (J_v B)J_b = bkJ_{v \times b}$, второе — из подробного вычисления для $JBB^T J$. Заметим, что матрица смежности графа ВІВ-схемы имеет вид

$$A(G) = \begin{pmatrix} O & B \\ B^T & O \end{pmatrix},$$

где B — матрица инцидентий схемы. Следовательно, $A^2(G) = BB^T + B^T B$.

Так как $B^T B = (r - \lambda^*)I + \lambda^*J$ и $B^T B$ имеют одинаковые ненулевые собственные значения, то собственными значениями матрицы $A^2(G)$ являются rk с кратностью 2, $r - \lambda^*$ с кратностью $2(v-1)$ и 0 с кратностью $b-v$. Таким образом, собственные значения двудольного графа G таковы: $\pm(rk)^{1/2}$, $\pm(r - \lambda^*)^{1/2}$ и 0 с кратностями соответственно $1, v-1$ и $b-v$.

Параметры схемы полностью определяют спектр графа. Следовательно, две неизоморфные схемы с одинаковыми параметрами определяют два конспектральных неизоморфных графов и существует конспектральное семейство неизоморфных графов. По этой причине говорят, что граф ВІВ-схемы характеризуется посредством своего спектра, если граф с таким спектром является графом ВІВ-схемы с такими же параметрами.

Каким образом можно оценить сложность графа ВС?

Спектральный метод определения числа остовных деревьев (сложность графа) $t(G)$ основан

на следующем утверждении — $t(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n-1} \mu_i$.

Для полного графа K_n будем иметь $t(K_n) = n^{n-2}$ (формула Кэли).

Для регулярного графа G с $n=2k$ вершинами, степени $n-2$ (граф приёма гостей)

$$t(G) = 2^{2k-2} (k-1)^k k^{k-2}.$$